X

Enseignants: Basterrechea, Dubuis, Huruguen

Algèbre linéaire & Géométrie - MAN

26 avril 2023

Durée : 3 heures

Examen Blanc (énoncé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

On donne les deux matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 40 \\ -3 & -10 & -28 \\ 5 & 41 & 57 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -4 & -1 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Question 1 *(2 points)* Que vaut le déterminant de A ?

☐ 3 ☐ 4 ☐ 0 ☐ 12

Question 2 *(1 point)* Quel est le coefficient en position $(1, 2)$ de la matrice AB ?

☐ -25 ☐ 91 ☐ -116 ☐ -69

Question 3 *(1 point)* Quel est le rang de la matrice ABA ?

☐ 3 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 1

Enoncé

On donne la base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ de $\mathbb{R}^3$, où :

$$v_1 = (1, 0, 2), \quad v_2 = (2, -1, 5), \quad v_3 = (-3, 1, -9).$$

Question 4 *(2 points)* Que vaut la première coordonnée de $v = (1, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$?

- [ ] $\frac{3}{2}$
- [ ] $\frac{5}{2}$
- [ ] $\frac{7}{2}$
- [ ] $\frac{1}{2}$

Question 5 *(1 point)* Parmi les éléments $v \in \mathbb{R}^3$ proposés ci-dessous, sélectionner celui qui vérifie que:

$$\mathrm{Vect}(v_3) \subset \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v).$$

- [ ] $v = (30, 14, 46)$
- [ ] $v = (32, 35, 29)$
- [ ] $v = (22, 57, -13)$
- [ ] $v = (41, 23, 61)$

Question 6 *(2 points)* Sélectionner la base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $v = (3, -1, 8)$ a ses trois coordonnées égales.

- [ ] $v_2, -v_3, v_1$
- [ ] $v_1, v_2, 3v_3$
- [ ] $2v_3, v_1, -v_2$
- [ ] $v_2, 2v_1, v_3$

Enoncé

On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dont on sait qu'elle vérifie :

$$f(1,7) = (-3,2,1) \quad \text{et} \quad f^{-1}(\{(1,2,5)\}) = \{(3,-4)\}$$

Question 7 *(1 point)* Quel est le rang de f ?

- ☐ 3
- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ 0

Question 8 *(2 points)* Parmi les éléments de $\mathbb{R}^3$ proposés ci-dessous, un seul appartient à $\operatorname{Im} f$. Lequel ?

- ☐ $(-1,-1,1)$
- ☐ $(-1,1,-1)$
- ☐ $(1,1,1)$
- ☐ $(1,-1,-1)$

Question 9 *(1 point)* Que peut-on dire de l'ensemble $f^{-1}(\{(4,-6,1)\})$?

- ☐ c'est une droite affine de $\mathbb{R}^3$
- ☐ il est vide
- ☐ c'est une droite affine de $\mathbb{R}^2$
- ☐ il contient un seul élément

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Sauf mention explicite du contraire, votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 10: *Cette question est notée sur 7 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7

Dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ on donne, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -\alpha \\ 1 & 7+\alpha & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Dans le cas où $\alpha = -1$, montrer que A est inversible et calculer sa matrice inverse.

(b) Prenons $\alpha = 2$. En détaillant votre réponse, trouver une décomposition colonne-ligne minimale de A.

(c) Déterminer le rang de A en fonction de la valeur de α.

Question 11: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

On donne les éléments suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = (3,2)\,,\ v_2 = (4,-1)\,,\ v_3 = (2,5)\,,\ v_4 = (-2,6)\,,\ v = (x,y).$$

On note V la droite affine de $\mathbb{R}^2$ contenant v_1 et v_2.

(a) Montrer que $\mathcal{B} = v_1, v_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ en fonction de x et y.

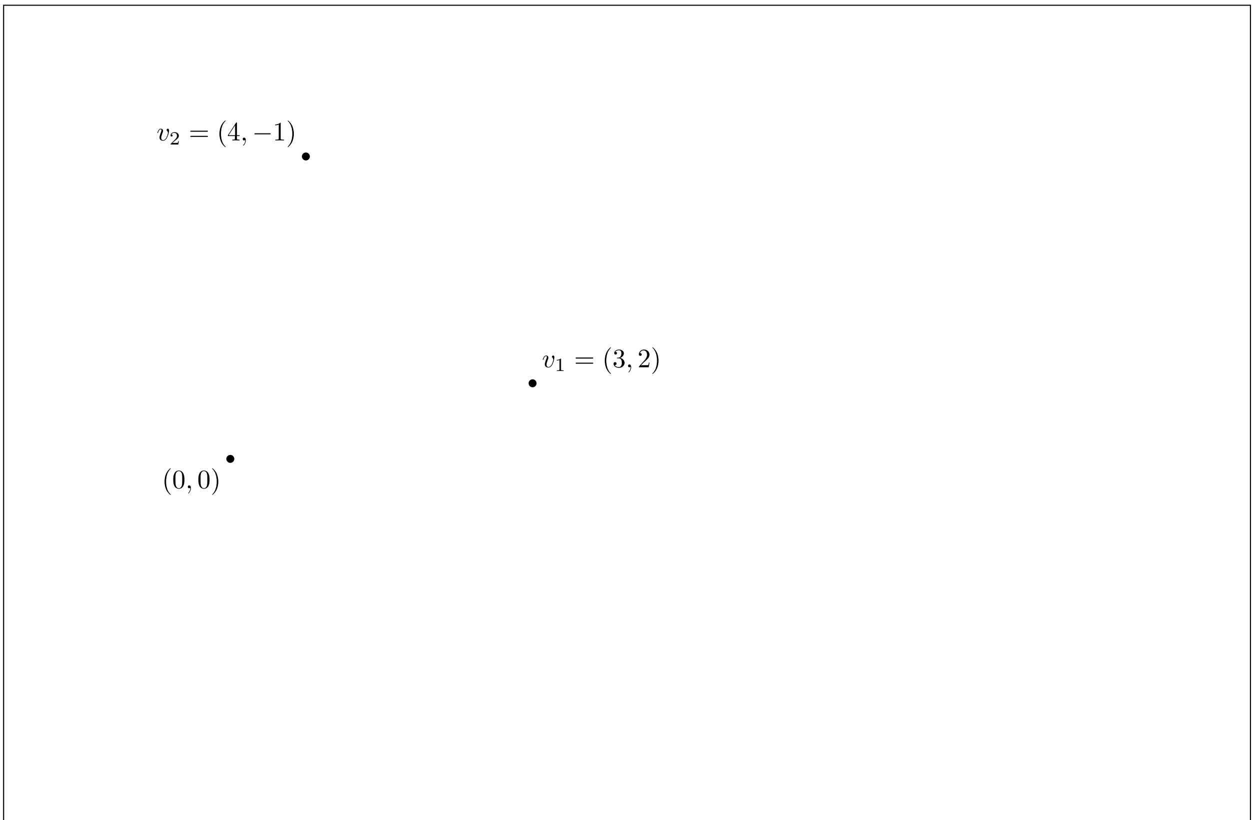
(b) En expliquant votre démarche, placer (approximativement) v_3 sur le dessin ci-dessous.

(c) Déterminer la matrice de changement de coordonnées de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, où :

$$\mathcal{B}' = v_4, 3v_2.$$

(d) Tracer V sur le dessin et déterminer une équation de V.

(e) On suppose que $v \in V$. Montrer par un calcul que le parallélogramme construit sur v, v_4 et celui construit sur v_2, v_1 ont la même orientation.



Question 12: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5 ☐.5 ☐6 ☐.5 ☐7

On suppose donnée une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes:

$$f \circ f = 0 \quad \text{et} \quad f(2,3,5) = f(-1,0,3) = (1,2,-1).$$

(a) Déterminer le rang de f puis une base de $\operatorname{Im} f$.

(b) Décrire $\operatorname{Ker} f$ par une (ou des) équation(s).

(c) Déterminer l'expression de $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.